

## **Open Access Repository**

www.ssoar.info

# Ansätze zur Abbildung sozialer Systeme mittels nicht-linearer dynamischer Modelle

Erdmann, Georg

Veröffentlichungsversion / Published Version Forschungsbericht / research report

Zur Verfügung gestellt in Kooperation mit / provided in cooperation with:

GESIS - Leibniz-Institut für Sozialwissenschaften

#### **Empfohlene Zitierung / Suggested Citation:**

Erdmann, G. (1986). *Ansätze zur Abbildung sozialer Systeme mittels nicht-linearer dynamischer Modelle*. (ZUMA-Arbeitsbericht, 1986/07). Mannheim: Zentrum für Umfragen, Methoden und Analysen -ZUMA-. <a href="https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0168-ssoar-66389">https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0168-ssoar-66389</a>

#### Nutzungsbedingungen:

Dieser Text wird unter einer Deposit-Lizenz (Keine Weiterverbreitung - keine Bearbeitung) zur Verfügung gestellt. Gewährt wird ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.



#### Terms of use:

This document is made available under Deposit Licence (No Redistribution - no modifications). We grant a non-exclusive, non-transferable, individual and limited right to using this document. This document is solely intended for your personal, non-commercial use. All of the copies of this documents must retain all copyright information and other information regarding legal protection. You are not allowed to alter this document in any way, to copy it for public or commercial purposes, to exhibit the document in public, to perform, distribute or otherwise use the document in public.

By using this particular document, you accept the above-stated conditions of use.



#### Georg Erdmann

Ansätze zur Abbildung sozialer Systeme mittels nicht-linearer dynamischer Modelle

ZUMA-Arbeitsbericht Nr. 86/07

Zentrum für Umfragen, Methoden und Analysen (ZUMA) e. V. Postfach 59 69 D-6800 Mannheim 1

September 1986

#### INHALT

1.	Einfi	ührung	3
2.	Einf	ache nicht-lineare Modelle	6
	2.1.	Ein lineares Modell als Ausgangspunkt	6
	2.2.	Exkurs: kontinuierliches versus diskretes Modell	8
	2.3.	Übergang zum nicht-linearen Modell	9
	2,4.	Wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation	13
	2.5.	Ein Modell zur Beschreibung des Meinungs- bildungsprozesses	18
	2.6.	Die Rolle von Bifurkationen	26
3.	algle	t-lineare Modelle mit mehreren Differenti- eichungen zur Abbildung von Interaktionen	20
		then mehreren Populationen	29
	3.1.	Wetthewerb und Koexistenz	30
	3.2.	Predator-Prey-Beziehung (Lotka-Volterra- Modell)	34
	3.3.	Symbiose	37
	3.4.	Ein Modell zur Beschreibung der Dynamik von Parteienstrukturen in parlamentari- schen Demokratien	38
	2.5	Die Redeutung von Fluktustionen	47

#### 1. Einführung

Eines der expansivsten Paradigmata in den Sozialwissenschaften – und nicht nur dort – ist die Systemanalyse. Dieser Begriff ist schillernd, schwer einzugrenzen und kaum griffig zu definieren. Ein wesentlicher Aspekt ist die Analyse des Zusammenspiels einer grossen Zahl beteiligter Individuen, Elemente, Partikel o.ä., wenn das Gesamtergebnis dieses Zusammenwirkens sich nicht aus der einfachen Aggregation des Verhaltens der beteiligten Einzelkomponenten ableiten lässt, sondern etwas neues, völlig anderes ist. Dieser Teilaspekt wird neuerdings mit dem Begriff "Synergetik" beschrieben.

Die Interaktionsregeln der beteiligten Elemente sind von System zu System verschieden und müssen disziplinär erforscht werden. Es ist jedoch ein vom betrachteten Objektbereich unabhängiges Phänomen, dass bei einer genügend grossen Anhäufung entsprechend interagierender Teile Quantität in Qualität umschlägt und – in der Sprache der Soziologie – Emergenzen entstehen. Die Formierungsregeln dieser Emergenzen beruhen dabei auf einer Reihe allgemeingültiger Gesetzmässigkeiten.

Grundgedanke der allgemeinen (mathematischen) Systemtheorie ("General Systems Theory") ist es, diese gemeinsamen Gesetzmässigkeiten zum Gegenstand interdisziplinärer Forschungen zu machen. Den fachspezifischen systemanalytischen Ansätzen stellt sich im Kern die Aufgabe, Analogien (Rapoport: "Mathematische Isomorphien") herauszuarbeiten, die, sofern vorhanden, die Ergebnisse der allgemeinen Systemtheorie den disziplinären Forschungen erschliessen. Wesentliche Fortschritte in einer Fachdisziplin wirken befruchtend auf die anderen Disziplinen bis hin zu qualitativ neuen wissenschaftlichen Erkenntnissen. Der wissenschaftliche Erkenntnisprozess selbst ist damit ein erstes Beispiel für ein synergetisches System.

Damit solch ein interdisziplinär angelegtes Forschungsprogramm erfolgreich sein kann, müssen sich die beteiligten Disziplinen einer gemeinsamen fachübergreifenden Terminologie bedienen. Wenn beispielsweise Soziologen von einem offenen System sprechen, so sollte darunter etwas Analoges zu dem gemeint sein, was auch andere Disziplinen darunter verstehen, nämlich ein System, welches in Beziehung zur Umwelt ff) zum Gegenstand haben.

Wie bei jeder Obersetzung bedarf es eines Originals. Es handelt sich um die Publikationen der Stuttgarter Physiker Haag, Haken und Weidlich in der Reihe "Synergetics" des Springer-Verlags, namentlich um das Buch von Weidlich/Haag (1983) mit dem Titel: "Concepts and Models of a Quantitative Sociology. The Dynamics of Interacting Populations".

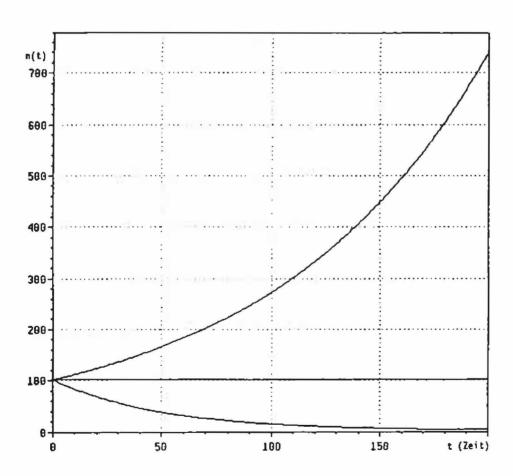
Unsere Studie geht in ihrem letzten Teil über diese Vorlage hinaus, indem sie bestrebt ist, die neueren Forschungsergebnisse über chaotische Systeme einzubeziehen. Dieser Forschungszweig befindet sich in einem noch jungen Stadium, deshalb sind die entsprechenden Ausführungen als die Darstellung von Zwischenergebnissen zu betrachten.

Wir hoffen, mit der vorliegenden Schrift der deutschen Soziologie einen Impuls zu geben, ihre verbalen Hypothesen zu formalisieren und zu präzisieren, damit sie dem modernen Instrumentarium der Systemanalyse zugänglich werden.

$$(b-d)*t$$
  $r*t$  (2.2)  $n(t) = n(0) *e$  =  $n(0) *e$ 

Dabei steht n(0) für die Populationsgrösse zum Anfangszeitpunkt t=0.

Das Lösungsverhalten von Modell (2.1) beschreibt den bekannten "dichte-unabhängigen" Wachstums- resp. Schrumpfungsprozess von Populationen. Für b>d wächst die Population exponentiell, im umgekehrten Fall b<d stirbt sie mit der Zeit aus, und für den Sonderfall b=d bleibt sie konstant in der Grösse des Anfangswertes.



Figur (2.1): Trajektorien von Modell (2.1)

(2.1) immer monoton (siehe die Trajektorien von Figur (2.1)). Diskrete Modelle, haben also u.U. ein wesentlich reicheres Reservoir an strukturell verschiedenen Lösungsmustern, als dies bei kontinuierlichen Modellen der Fall ist.

Der unterschiedliche Ansatz bei der Formulierung eines Modells lässt die Fixpunkte, d.h. Populationsgrössen, die einmal erreicht – sich im Zeitverlauf nicht weiter verändern:

(2.4) 
$$\frac{dn}{--} = 0$$
 resp.  $n(t+1) = n(t)$ 

unberührt. Im vorliegenden Fall ist einziger Fixpunkt der Wert "Null".

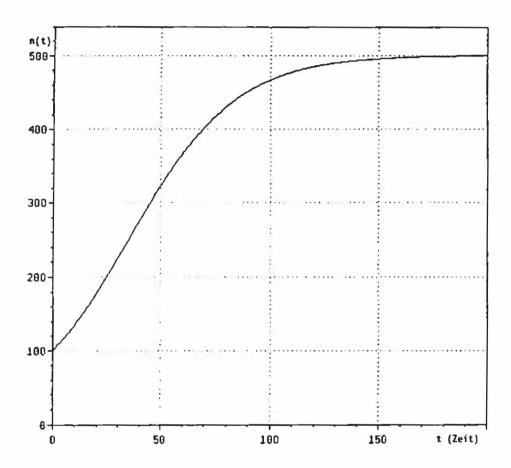
Synonym zu dem Begriff "Fixpunkt" spricht man auch von "Gleichgewichtspunkt" oder einfach vom "Gleichgewicht". Konvergieren Trajektorien aus dessen Umgebung gegen diesen Gleichgewichtspunkt, so bezeichnet man ihn als "stabiles Gleichgewicht", andernfalls als "labiles Gleichgewicht". Wie die Fixpunkte selbst bleiben auch deren Stabilitätseigenschaften invariant. Falls Konvergenz vorliegt (dies ist für r<0 der Fall), so besteht der Unterschied zwischen den Trajektorien des diskreten und des kontinuierlichen Modells einzig in der Art und Weise, wie dieser Fixpunkt erreicht wird.

Dieser Tatsache sollte man sich bei der Auswahl des Modelltyps stets bewusst sein.

#### 2.3. Obergang zum nicht-linearen Modell

Das lineare Wachstumsmodell (2.1) wird ein nicht-lineares Modell, wenn die Annahme eingefügt wird, dass das Verhalten der Systemelemente / Individuen sich wechselseitig beeinflusst. Es kann sich dabei sowohl um bewusste oder unbewusste Interaktionen handeln.

(2.9) 
$$n(t) = K * (1 + \frac{K - n(0)}{n(0)} + \exp(-b * t))$$



Figur (2.2): Trajektorie des Modells (2.6)

Eine algebraisch geschlossene Darstellung der Lösung eines dynamischen nicht-linearen Modells ist für viele komplexe Modelle nicht möglich. In solchen Fällen lassen sich die Trajektorien nur experimentell durch Computersimulationen bestimmen. Dies geschieht durch Vorgabe der Bewegungsgleichung des Modells mit den dazugehörigen Parameterwerten. Ferner bedarf es der Vorgabe eines Anfangswertes n(0), der Schrittweite "dt" sowie eines maximalen Rundungsfehlers.

#### 2.4. Wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation

Die Trajektorie von Modell (2.6) in Figur (2.2) basiert auf einer deterministischen Interpretation des zugrundeliegenden Wachstumsgesetzes. In der Realität wird sich die Population nicht streng analog dieser Gesetzmässigkeit entwikkeln. Das Wachstum wird durch Einflüsse überlagert und gestört, die auf nicht explizit im Modell berücksichtigten Variablen und Faktoren beruhen. Solche Faktoren können beispielsweise kurzfristige Klimaschwankungen, Epidemien, kriegerische Auseinandersetzungen o.ä. sein.

Sofern diese Faktoren eine systematische Veränderung des Wachstumsprozesses bewirken, ist das Modell fehlspezifiziert und ein unzulässiges Abbild der Realität. Schlagen sich hingegen die unberücksichtigten Faktoren einzig in Form von Schwankungen der tatsächlichen Entwicklung um die errechnete deterministische Trajektorie nieder, so kann man sie als Zufallsfluktuationen auffassen und in das Modell entsprechend integrieren.

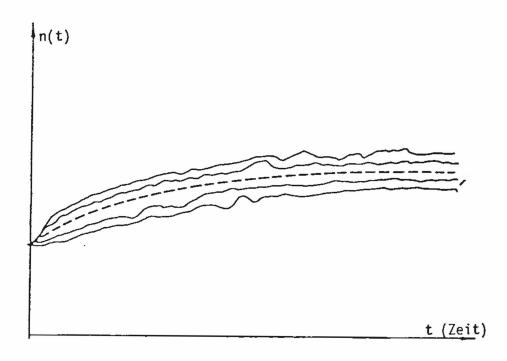
Das Modell wird damit ein stochastisches Modell. Gegenstand sind nicht mehr die Veränderungen der deterministischen Variable n(t), sondern diejenigen der Wahrscheinlichkeit p(n(t),t), dass zum Zeitpunkt "t" die Populationsgrösse n(t) vorgefunden wird. Die Wahrscheinlichkeit p(n(t),t) spielt die Rolle der Variablen n(t) und wird daher als Zufallsvariable bezeichnet. Das Verhalten von Zufallsvariablen im Zeitverlauf heisst stochastischer Prozess.

Die Bewegungsgleichung für die Zufallsvariable p(n(t),t) ist ein Spezialfall der "Master-Gleichung" (vgl. Haken (1978), S. 75 ff) und diese lautet allgemein: (2)

Dabei ist w(m->n) der Wahrscheinlichkeitsfluss, dass sich in einer vorgegebenen Zeiteinheit "dt" die Grösse der Population von Konfiguration m(t) zu Konfiguration n(t) entwickelt. Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.11) enthält die Summe aller Effekte, welche die Konfiguration n(t) wahrscheinlicher machen, während der zweite

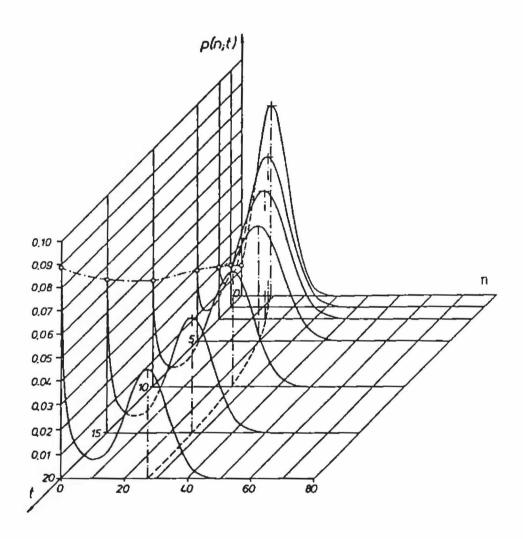
(2.14b) 
$$w(n->n) = b * n(t)$$

Damit ist das stochastische Modell bis auf die Parameterwerte voll spezifiziert.



Figur (2.3): Monte-Carlo-Simulationen des Modells (2.6)

Die Lösung des Modells besteht in der zeitlichen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung p(n(t),t) aus einer für den Anfangszeitpunkt t=0 vorgegebenen Ausgangsverteilung p(n(0),0). Deren analytische Berechnung ist - wie schon beim deterministischen Modell - in aller Regel nicht möglich. In diesen Fällen behilft man sich mittels Monte-Carlo-Simulationen. Figur (2.3) zeigt einige der mit dieser



Figur (2.4): Evolution der Wahrscheinlichkeitsverteilung p(n,t) des Modells (2.13) mit den Parametern

(aus: Weidlich/Haag (1983), S. 118)

zur Beschreibung des kollektiven Meinungsbildungsprozesses verwendet (vgl. Weidlich/Haag (1983), S. 18 ff). Es steht dabei die Frage im Mittelpunkt, wie sich bestimmte Meinungen, Einstellungen, Ideologien, Dogmen o.ä. in einer Gesellschaft durchsetzen und verändern. Zur Verdeutlichung des Prinzips genügt die Beschränkung auf den einfachsten Fall zweier konträrer Meinungen.

Die Gesellschaft bestehe aus "N" Individuen, die sich jeweils für eine von zwei Weltanschauungen, Ansichten o.ä. entscheiden. Zur Vereinfachung wird auf die Berücksichtigung von Geburts- und Sterbeprozessen sowie Zu- und Abwanderungen verzichtet, so dass "N" eine Konstante ist.

n1(t) sei der Anteil derjenigen Gesellschaftsangehörigen, die der ersten Meinung zuneigen, folglich ist

$$(2.17) n2(t) = 1 - n1(t)$$

der Anteil derer, die zum Zeitpunkt "t" Anhänger der zweiten Meinung sind.

Die Symmetrieeigenschaften zwischen den Variablen "n1" und "n2" werden durch die Definition folgender neuen Variablen sichtbar:

$$(2.18) n(t) = 2 * (n1(t) - 0.5)$$
$$= -2 * (n2(t) - 0.5)$$

Diese neue Variable wird Null, wenn jeweils die Hälfte der Gesellschaftsangehörigen den Meinungen "1" und "2" zuneigt, keine der beiden Gruppen also ein Übergewicht hat. Ausserdem ist definitionsgemäss

$$(2.19)$$
  $-1.0 < n(t) < 1.0$ 

Der untere Grenzwert wird erreicht, wenn alle Gesellschaftsangehörigen der Ansicht "2" zuneigen, umgekehrt besagt der obere Grenzwert, dass die gesamte Gesellschaft ausschliesslich Meinung "1" vertritt. mit den Parametern:

c ist ein Parameter, dessen Höhe den Grad der gesellschaftlichen Kohäsion angibt. Je grösser c>O ist, desto stärker ist der gesellschaftliche Zusammenhalt und damit – ceteris paribus – die Adaption der Mehrheitsmeinung durch die anderen Gesellschaftsangehörigen.

g >0 ist ein Parameter für die Geschwindigkeit dieses Prozesses. Er ist Ausdruck der gesellschaftlichen Anpassungsfähigkeit / Flexibilität. Je grösser g>0 ist, desto häufigere Meinungswechsel finden pro Zeiteinheit statt. (4)

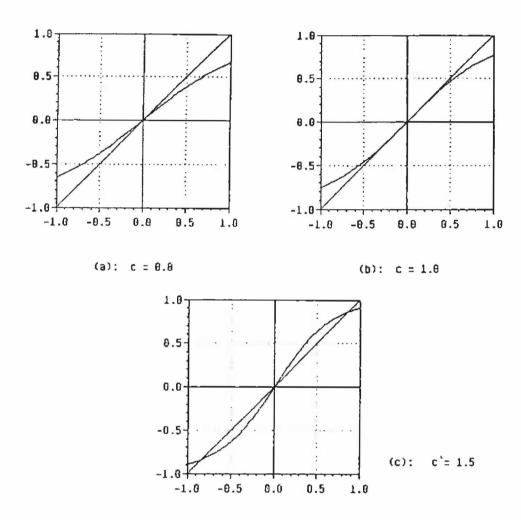
Der Modellansatz (2.21) kann ergänzt werden, um die Möglichkeit autonom bestehender Präferenzen zugunsten einer der beiden Meinungen einzuschliessen. Unter autonomen Präferenzen wird eine im Rahmen des Modells unerklärte Tendenz zugunsten einer der beiden Meinungen verstanden.

(2.22a) 
$$w (n(t),t) = g*exp(a+c*n(t)) = g*exp(u)$$
  
21

$$(2.22b) \quad \text{w} \quad (n(t),t) = g*exp(-a-c*n(t)) = g*exp(-u)$$

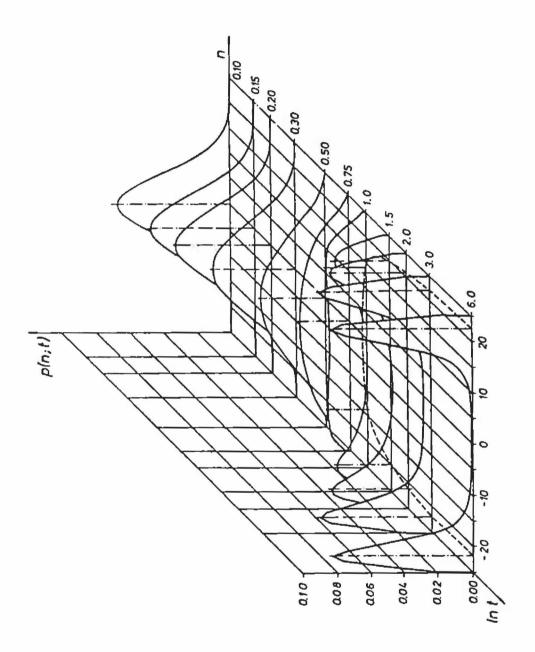
Sofern a>O ist, wird die Ansicht "1" autonom bevorzugt, und vice versa.

Wird (2.21) resp. (2.22) in die Differentialgleichungen (2.20) eingefügt, so ergibt sich: (5)



Figur (2.5): Graphische Darstellung der Fixpunkte von Modell (2.23) als Schnittpunkte der transzendenten Gleichung (2.24)

Wird c>1, d.h. steigt die gesellschaftliche Kohäsion entsprechend, so verliert dieser Gleichgewichtszustand seine Stabilität. Statt dessen treten zwei neue stabile Gleichgewichtspunkte auf, die jeweils Konstellationen bezeichnen, in denen sich entweder die eine oder die andere Meinung in der Gesellschaft durchgesetzt hat (vgl. Figur (2.5), Teil (c)). Die hier grundsätzlich bestehende Wahlmöglichkeit



Figur (2.6): Evolution der Wahrscheinlichkeitsverteilung p(n,t) des Modells (2.23) bei c=1.5

(aus: Weidlich/Haag (1983). S. 118)

Die konkreten Gesetzmässigkeiten des Suchprozesses gehören zu den spezifischen Merkmalen eines betrachteten Systems. Doch die dadurch ausgelösten makroskopischen Fluktuationen haben die systeminvariante Eigenschaft, dass die Resultate des Suchprozesses nicht determiniert sind, sofern sie in der Nähe der Bifurkationspunkte auftreten.

Sobald jedoch einmal eine neue Struktur vorgezeichnet ist, beginnt ein irreversibler Prozess: weder der alte Zustand, noch eine andere Gleichgewichtskonfiguration kann unter vertretbarem Aufwand erreicht werden.

Ein konkretes Beispiel aus dem Bereich der Ökonomie ist der Wechsel von der Expansions- zur Stabilitätspolitik im Verlauf der siebziger Jahre. Er war weltweit mit dem Anstieg der Arbeitslosigkeit verbunden. Die entstandene Unterbeschäftigung kann als ein neues stabiles. Gleichgewicht aufgefasst werden (vgl. Malinvaud (1977)). Darüber hinaus wird vermutet, dass zumindest noch ein zweites stabiles Gleichgewicht mit Vollbeschäftigung existiert, das "Walrasianische Gleichgewicht". In der theoretischen Diskussion werden - je nach Schule - eine Reihe von Gründen dafür genannt, warum dieses zweite Gleichgewicht in den siebziger Jahren nicht erreicht worden ist. Die aus diesen Analysen heraus entwickelte Wirtschaftspolitik hat jedoch bislang bei der Bekämpfung der Arbeitslosigkeit versagt, und zwar möglicherweise deshalb, weil mit dem Erreichen eines stabilen Unterbeschäftigungsgleichgewichts ein irreversibler Prozess eingetreten ist: die während der Übergangssituation noch wirksame Wirtschaftspolitik reicht nun nicht mehr aus, um das entstandene Problem zu lösen.

Für die Modellierung derartiger Prozesse ergibt sich daraus folgendes: Faktoren, die nur in der Nähe von Bifurkationen eine Bedeutung besitzen, in Phasen relativer Stabilität hingegen das System kaum zu beeinflussen vermögen, sind im Interesse der Komplexitätsreduktion zu eliminieren, sofern sich die Betrachtung des Systems auf diese Phasen beschränkt (z.B. neoklassische Wachstumstheorie). Man spricht von der "adiabatischen" Elimination irrelevanter Variablen. Solche Variablen müssen jedoch unbedingt aufgenommen werden, soll das Modell in Verzweigungssituationen relevante Aussagen treffen können. Andererseits sind dafür möglicherweise andere Variablen als Parameter oder stochastische Störglieder zu behandeln.

Dem Ziel der Komplexitätsreduktion werden am Ende mehrere verschiedenartige Modelle gerecht, die ein und denselben 3. <u>Nicht-lineare Modelle mit mehreren Differentialglei-</u>
<u>chungen zur Abbildung von Interaktionen zwischen mehre-</u>
<u>ren Populationen</u>

Auch wenn die bis zu dieser Stelle vorgestellten Modellbeispiele eine reiche Fülle systemanalytischer Phänomene abzubilden in der Lage sind, ist die Komplexität dieser Modelle im allgemeinen zu gering, um relevante sozialwissenschaftliche Fragen untersuchen zu können.

Insbesondere die unterstellte Homogenität der betrachteten Population beschränkt den Nutzen diese Modelltypen für die Untersuchung soziologischer, politologischer u.ä Systeme. Man kann diese Beschränkung leicht aufheben und erhält eine neue Klasse nicht-linearer dynamischer Modelle, die u.a. Prozesse der Bildung und Veränderung von Gruppen sowie der zwischen solchen Teilsystemen stattfindenden Interaktionsmuster abbilden kann.

In den folgenden Modellbeispielen wird unterstellt, dass sich die elementaren Einheiten des betrachteten Systems aufgrund gemeinsamer Merkmale zu Gruppen, Organisationen, Populationen oder anderen Teilsystemen zusammenfassen lassen. Die innere Struktur der Teilsysteme wird als homogen unterstellt. Differenzierungsprozesse innerhalb der Gruppe bleiben ausgeklammert. Die Modelle konzentrieren sich auf strukturbildende Prozesse, die selbstorganisiert als Folge der zwischen den Subsystemen bestehenden Interaktionsmuster entstehen.

In einer ersten Gruppe von Modellen geht es um den Überlebenskampf dieser Teilsysteme. Die zwischen ihnen angenommenen Interaktionsmuster sind folgenden Typs:

- Wettbewerb und Koexistenz (z.B. beim Verteilungskampf um knappe Ressourcen),
- Räuber-Beute-Beziehung ("Predator-Prey-Model", "Lotka-Volterra-Modell"),
- Symbiose.

Zuletzt wird der Prozess der Selbsterzeugung und Ausdiffe-

n1(t) und n2(t) überführt:

(3.3a) 
$$\frac{dn1}{---} = (k - c + n1(t) - c + n2(t)) + n1(t)$$
  
 $dt$  1 11 12

(3.3b) 
$$\frac{dn2}{---} = (k - c * n1(t) - c * n2(t)) * n2(t)$$
  
 $dt$  2 21 22

Dabei sind k , k , c , c , c und c Modellparemeter. 1 2 11 12 21 22

Die (mathematische) Analyse dieses nicht-linearen dynamischen Modells erfolgt analog des bereits beschriebenen Vorgehens. Zunächst werden die Fixpunkte des Modells durch Berechnen der Nullstellen:

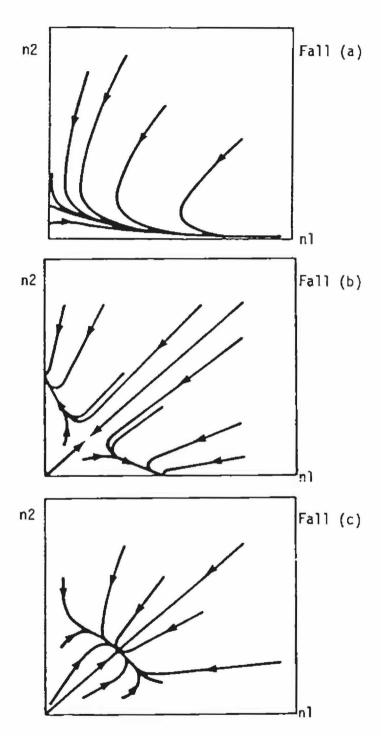
bestimmt. Daran schliesst sich die Untersuchung der Stabilitätseigenschaften des Modells in diesen Fixpunkten an.

Im vorliegenden Fall ergibt sich folgendes: abgesehen von dem Sonderfall, dass die Geburten- und Sterberaten beider Populationen übereinstimmen, sind stabile Gleichgewichtslagen nur in Konfigurationen gegeben, wo eine der beiden Populationen ausgestorben ist. Im langfristigen Gleichgewicht kann nur eine der beiden Spezies überleben.

Modell (3.3) ist also die mathematische Formalisierung Darwinscher Evolutionstheorie in ihrer "grausamen Variante": nur der Stärkste kann überleben.

Nun ist in der Natur wie in sozialen Systemen ein ausserordentlich grosser Arten- und Formenreichtum gegeben, so dass die Modellvariante (3.3) die komplexe, hochgradig ausdifferenzierte Realität offenbar nur partiell beschreibt.

Mittels einer kleinen Modifikation des Modells ist jedoch



Figur (3.1): Trajektorien von Modell (3.6) in der Phasenraumdarstellung (aus: Huckfeld/Kohfeld/Likens (1982), S. 76 ff)

d.h. die Sterberate dieser Population nimmt mit wachsender Grösse der Räuberpopulation n2(t) zu.

Nimmt man ferner an, dass die Geburtenrate der Räuberpopulation proportional zur Grösse der Beutepopulation n1(t) steigt, so ergibt sich für die Räuberpopulation:

Damit ist das Modell bis auf die Parameterwerte spezifiziert. Es besitzt neben dem Nullpunkt den Gleichgewichtspunkt:

(3.8) 
$$n_1 = d/b$$
;  $n_2 = b/d$   
2 2 1 1

Dieser Punkt ist nicht stabil. Trajektorien aus der Umgebung dieses Punktes streben nicht gegen dieses Gleichgewicht, streben nicht gegen den Nullpunkt oder wachsen über alle Grenzen hinaus. Sie beschreiben statt dessen jeweils geschlossene Zyklen um den Gleichgewichtspunkt (3.8) herum. Eine Trajektorie dieser Art ist in Figur (3.2) dargestellt.

Die periodische Dynamik des Predator-Prey-Modells erklärt sich folgendermassen: Wenn die Population der Räuber zu gross geworden ist, d.h. über den Gleichgewichtswert (3.8) hinaus anwächst, wird die Beutepopulation stark dezimiert mit der Folge, dass die Ressourcenbasis für die Räuberpopulation schrumpft. Mit der Verknappung ihrer Lebensgrundlagen tritt konsequenterweise auch eine Reduktion der Räuberpopulation ein, was auf der anderen Seite die Regeneration der Beutepopulation ermöglicht. Haben sich die Lebensgrundlagen der Räuberpopulation wieder verbesert, so wächst sie wieder über den Gleichgewichtswert hinaus an, und der Zyklus beginnt von neuem.

Um die zyklischen Schwankungen der Populationsgrössen in Gang zu halten, bedarf es keinerlei von aussen vorgegebener Strukturen. Es genügt, dass das System einmal nicht in der Gleichgewichtslage (3.8) ist. Die Zyklen entstehen daraus vollständig selbstorganisiert.

Wird das Predator-Prey-Modell (3.7) nicht deterministisch, sondern stochastisch betrachtet, so erweisen sich die Zyklen als extrem sensitiv gegenüber kleineren Fluktuationen (vgl. Weidlich/Haag (1983), S. 128). Es ergibt sich wieder das bereits in Kapitel 2.4 besprochene Resultat, dass auf lange Sicht einzig das Aussterben beider Populationen wahrscheinlich ist.

Andererseits werden die Lotka-Volterra-Zyklen von Biologen für verschiedenste Tierpopulationen effektiv beobachtet, sodass sich die Frage aufdrängt, was die Stabilität der Zyklen gewährleisten könnte. Die Antwort besteht in der Einfügung nicht-linearer Migrationsprozesse in das theoretische Modell. Diese Modellerweiterung führt zu einer relativ grossen Anzahl strukturell verschiedenartiger Lösungsverläufe, worunter sich auch stabile Grenzzyklen befinden, die von den Anfangsbedingungen unabhängig sind.

#### 3.3. Symbiose

Das symbiotische Zusammenleben mehrerer Populationen ist ein weiterer Spezialfall der Spezialisierung und selbstorganisierten Ausdifferenzierung eines Systems.

Verschiedene Populationen leben in einer Symbiose miteinander, wenn die Existenz der einen Spezies die Lebens- und Entwicklungsbedingungen der anderen unterstützt und begünstigt. Diese Art des Zusammenlebens lässt sich beispiels-weise mit dem folgenden Modellansatz erfassen:

Zu den Wahlen sind jeweils mehrere Parteien zugelassen. Die Wahlberechtigten sind keine homogene Masse, sondern zerfalten in mehrere disjunkte Wählergruppen, die sich beispielsweise in ihren ideologischen Einstellungen unterscheiden. Die Zuordnung der Wähler zu diesen Gruppen sei im Folgenden als fix angenommen, könnte aber auch analog zum Modell des gesellschaftlichen Meinungsbildungsprozesses (vgl. Kapitel 2.5) explizit endogenisiert werden. In jedem Fall drückt sich dieser Zuordnungsprozess darin aus, dass die Wähler einer Gruppe gemeinsame, für ihr Wahlverhalten relevante Merkmale besitzen.

Die Zuordnung zu einer Ideologie hat für den Wähler nicht automatisch die Präferenz einer Partei zur Folge. Alle Parteien stehen für alle Wählergruppen offen. Das Entstehen einer verfestigten Parteienstruktur setzt keine exogen vorgegebenen Parteienpräferenzen voraus, sondern geschieht endogen, oder, in der Terminologie der Synergetik, "selbstorganisiert".

Das Wählerwanderungs-Verhalten der beteiligten Gruppen wird mittels "individueller Wahrscheinlichkeiten des Parteien-wechsels" beschrieben. Falls mit der Abgrenzung zweier Gruppen "P=poor" und "R=rich" die Komplexität des ideologischen Spektrums der Gesellschaft hinreichend erfasst werden kann, lassen sich solche übergangswahrscheinlichkeiten in Analogie zu Gleichung (2.21) formalisieren durch:

(P) (P) (P) (3.11a) 
$$W (t) = \exp(c +P(t) + s +R(t))$$

(3.11b) (R) (R) (R) (3.11b) 
$$W$$
 (t) =  $exp(c +R(t) + s +P(t))$  ij j

Dabei ist

(P) (R)

W ,W die individuelle Übergangswahrscheinlichkeit
ij ij pro Zeiteinheit für Angehörige der Wählergruppe
"P" (resp. "R"), von Partei "i" zu Partei "j"
zu wechseln. Ist dieses Zeitintervall gross, so

Weitere Einzelheiten können Erdmann/Fritsch (1985) entnommen werden.

Mittels dieses nicht-linearen Modells lassen sich durch unterschiedliche Parameterwerte (3.12) eine Vielzahl verschiedenartiger, strukturell-stabiler Parteiensysteme reproduzieren. Strukturelle Stabilität bedeutet in diesem Zusammenhang, dass kleine Änderungen des Anfangszustandes sowie kleine Veränderungen der Parameterwerte "in der Regel" kaum Auswirkungen auf die qualitative Dynamik des Modells besitzen (vgl. Thom (1976)). Ausnahmen sind in Bifurkationspunkten gegeben.

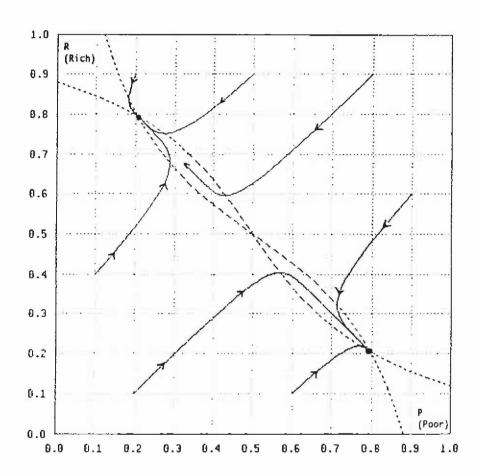
Für den Fall, dass nur zwei Parteien zur Wahl stehen, ist die Dynamik des Parteiensystems in einem 2-dimensionalen Phasenraum darstellbar. Beispielhaft zeigen dies die folgenden Figuren. Dort sind in den beiden Achsen die Anteile abgetragen, mit welchen die beiden Wählergruppen "P" und "R" zugunsten der ersten Partei stimmen. Logischerweise ist damit auch der Wähleranteil der zweiten Partei festliegend. Jeder Punkt repräsentiert folglich eine mögliche Wähler- resp. Parteienkonstellation.

Figur (3.3) basiert auf Parameterwerten, die auf eine nur schwache Interaktion zwischen den Wählergruppen hindeuten. Das politische System strebt gegen einen Gleichgewichtszustand, der dadurch gekennzeichnet ist, dass beide Wählergruppen jeweils 50 Prozent ihrer Stimmen einer der beiden Parteien geben.

Zu interpretieren ist dieses Bild als Darstellung der Situation zweier "Volksparteien", deren Integrationskraft beide Wählergruppen erreicht, die somit für beide Gruppen wählbar sind. Ihre Gewichte halten sich im Ergebnis annähernd die Waage. Je nach "Tagesform" wird mal die eine Partei, mal die andere vorne liegen.

zustandes bestimmt werden.

Es gibt in diesem Fall mehr als nur einen Gleichgewichtspunkt, nämlich insgesamt drei. Laut Figur (3.4) sind dies die Schnittpunkte der unterbrochenen Linien. Ein Gleichgewichtspunkt davon ist instabil, die beiden anderen sind stabil. Letztere sind die Endpunkte (Senken) der Trajektorien.



Figur (3.4): Trajektorien des Parteienmodells im Phasenraum bei hoher Kohäsion einer der beteiligten gesellschaftlichen Gruppen.

(P) (R) (P) (R) 
$$c = 1.3, c = 1.3, s = s = -1$$

handelt werden. Dazu sei angenommen, dass beide Wählergruppen hohe innere Kohäsion aufweisen, dass ferner eine Gruppe Antipathie, die andere Sympathie gegenüber den politisch Andersdenkenden zeige.

Unter diesen Annahmen gibt es einen einzigen Fixpunkt (Schnittpunkt der gestrichelten Linien in Figur (3.5)), und dieser ist nicht stabil. Befindet sich ein Parteiensystem unter den getroffenen Annahmen in der Nachbarschaft dieses Fixpunktes, so bewegt es sich von diesem fort und "konvergiert" gegen eine periodische Bewegung. Man spricht von einem "Grenzzyklus" oder "Attraktor", der die Trajektorien des. Modells anzieht. In statisch verstandenem Sinne befindet sich hier das Parteiensystem ständig im Ungleichgewicht, doch in dynamischer Betrachtungsweise stellt der Grenzzyklus ein stabiles Gleichgewicht dar. (8)

Das Parteiensystem gelangt bei dieser Konstellation nicht zur Ruhe, denn hat sich einmal Gruppe "P" mehrheitlich für eine Partei entschieden, so folgt ihr mit einer zeitlichen Verzögerung die Gruppe "R" aufgrund ihrer externen Sympathie. Dies führt zur Neuorientierung der Angehörigen von Gruppe "P", denn aufgrund ihrer externen Antipathie werden sie durch die Entscheidungen der "R"-Wähler zum erreuten Parteienwechsel veranlasst. (8)

Allerdings erfolgt die Bewegung des Parteiensystems entlang eines Grenzzyklus' nicht völlig gleichmässig. Es gibt Konstellationen, welche relativ schnell durchlaufen werden, während das System in anderen scheinbar einen Moment lang zur Ruhe kommt. Dieses Phänomen lässt sich durch die Betrachtung der Wahrscheinlichkeitsverteilung des langfristigen Gleichgewichts veranschaulichen (vgl. Figur (3.6)). Zwar ist die Wahrscheinlichkeitsdichte entlang des Grenzzyklus konzentriert, doch ist diese Konzentration ungleichmassig. Dort, wo sie ihre lokalen Maxima annimmt, befinden sich a Konstellationen, welche relativ langsam durchlausodass die Wahrscheinlichkeit gross ist, das fen werc 'nem bestimmten Zeitpunkt hier anzutreffen. System zu

Die Relevan' des Modelis kann man nicht daran messen, ob die simulierten Bewegungsmuster in bestehenden Gesellschaften tatsächlich beobachtet werden können. Ist dies nämlich nicht der Fall, so könnte dies auf Parameterwerte schliessen lassen, welche diese Dynamik nicht reproduzieren.

#### 3.5. Die Bedeutung von Fluktuationen

Mit diesem Abschnitt wenden wir uns der Frage zu, welches Verhältnis zwischen Zufall und Notwendigkeit besteht. Nach dem bisher Behandelten ist der Zufall vor allem in dem Moment entscheidend, wo sich äussere Faktoren des Systems geändert haben und einen Suchprozess der individuellen Elemente auslösen, deren Bestreben es ist, sich den veränderten Verhältnissen anzupassen. Derartige Suchprozesse schlagen sich im Modell in Fluktuationen nieder.

Bei der Betrachtung linearer Systeme ist die Wirkung solcher Fluktuationen auf das Gesamtsystem proportional zu ihrer Höhe. Für den Fall nicht-linearer Modelle sind die Dinge wesentlich komplexer. Eine kleine Ursache kann kleine, aber auch grosse Wirkungen haben, je nach dem, in welcher Konstellation sich das System gerade befindet.

Dieser Aspekt sei im Folgenden anhand des oben skizzierten Parteienmodells verdeutlicht. Die Parameterfluktuation wird als periodische Schwingung des Typs

(3.14) 
$$a(t) = a * sin (2*phi*t/T)$$

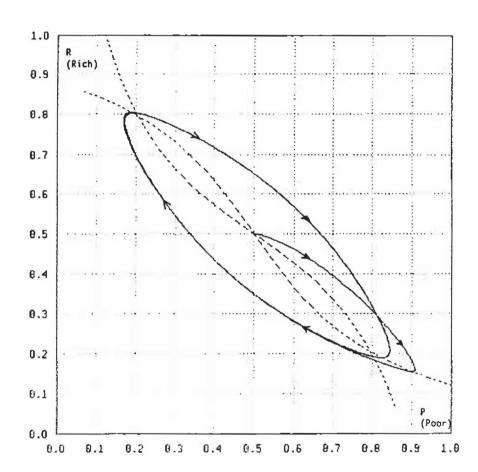
mit der Amplitude a = 0.2 und der Schwingungsperiode T ein-O geführt, die das Verhalten der Wählergruppe "P" überlagern soll (vgl. Gleichung (3.11)):

(3.15) 
$$(R)$$
  $(R)$   $(R)$   $(R)$   $(3.15)$   $(R)$   $(R)$ 

Für die in den folgenden Abbildungen dargestellten Simulationen wurden die Parameterwerte in der Weise festgesetzt, dass unter Ausklammerung der Fluktuation (3.14) drei Gleichgewichtspunkte – analog Figur (3.4) – vorliegen.

Dies ist das vom linearen Modell her gewohnte Bild: die Wirkung der Fluktuation verändert das makroskopische Bewegungsmuster nur geringfügig.

Wird hingegen die Schwingungsperiode der Fluktuation (3.14) länger, d.h. sind die Fluktuationen träge, so ändert sich das Bild einer solchen Trajektorie drastisch, ohne dass es dazu einer vergrössereten Amplitude bedürfte. In Figur (3.8) ist als einzig Veränderung T=15 gesetzt worden.



Figur (3.8): Trajektorie des Parteienmodells unter dem Einfluss träger Fluktuationen

(P) (R) (P) (R) 
$$c = c = 1.3$$
,  $s = s = -1.0$ ,  $T = 15$ 

#### 4. Die Synergetische Verhaltensannahme und Selbstorganisation sozialer Systeme

Dies ist der Moment, den analytischen Ansatz formaler Modellbildung aus einer weiteren Perspektive zu betrachten und die getroffenen Grundannahmen zu würdigen.

Ausgangspunkt der Modellbeispiele sind komplexe Systeme, d.h. Systeme, die jeweils aus einer Vielzahl von individuellen Einzelkomponenten – hier jeweils die Angehörigen einer Population – zusammengesetzt sind.

Solange keine Interaktionen zwischen diesen Elementen vorliegen, wird der entsprechende Modellansatz linear, und das Verhalten des Systems auf der nächst-höheren Aggregationsebene ergibt sich aus der einfachen Aufsummierung der individuellen Verhaltenskomponenten.

Sobald das Verhalten der individuellen Einheiten wechselseitig beeinflusst ist. d.h. vom Ergebnis der eingetretenen Systemkonstellation mitbestimmt wird, ist die formale Struktur des zugehörigen Modells nicht-linear, und auf der nächst-höheren Aggregationsebene treten Emergenzen auf, d.h. Strukturbildungen, die sich nicht einfach aus der Summe der beteiligten Einzelkomponenten ergeben.

Dies wird beim oben beispielhaft dargestellten Übergang vom linearen zum nicht-linearen Modell (vgl. Modell (2.1) mit Modell (2.10) deutlich. Solange das Sterbeverhalten exogen vorbestimmt ist, reicht zur Beschreibung des Systemverhaltens der lineare Ansatz aus. Ist das Verhalten von Systemelementen über Feed-backs (teilweise) endogen bestimmt, wird die formale Struktur des zugehörigen Modells nichtlinear, und das makroskopische Verhalten des Systems zeigt einen oder mehrere inhärente stabile Strukturen.

In Anlehnung an Haken (1978) werden derartige Phänomene als "synergetische Systeme" bezeichnet. Handeln betroffene Individuen entsprechend, so sprechen wir von der "synergetischen Verhaltensannahme".

Haken definiert die sich mit derartigen Phänomenen beschäftigende interdisziplinäre Forschungsrichtung, Synergetik genannt, als "Lehre vom Zusammenwirken", oder

u.a. die "Kontext-Analyse", eine Spezialdisziplin zwischen Soziologie und Sozialpsychologie, mit dieser Frage (vgl. z.B. Corning (1983), Esser (1985), Huckfeld/Sprague (1986)) Opp (1985) u.a.).

Synergetische Systeme sind jedoch nicht notwendigerweise an bewusstes strategisches oder rationales Verhalten geknüpft, wie dies beispielsweise mit dem Begriff "Kooperation" in sozialwissenschaftlichen Systemen implizit verbunden wird.

So beruhen die in physikalischen, chemischen, biologischen und anderen Systemen unter bestimmten Umständen ablaufenden synergetischen Prozesse nicht auf bewussten Interaktionen der daran beteiligten Elemente (vgl. die Beispiele bei Haken (1983)).

Auch in sozialen Systemen gibt es Synergismen, die nicht als Ergebnis zielorientierter Entscheidungen interpretierbar sind. Synergetische Prozesse treten beispielsweise in ökonomischen Systemen auf, wenn makroökonomische Variablen bei mikroökonomischen Entscheidungen eine Rolle spielen, sei es, dass sich die Akteure direkt an solchen Grössen orientieren, sei es, dass diese Variablen indirekt in die Entscheidung eingehen, z.B. über variable Transaktionskosten, über Spillover-Effekte zwischen verschiedenen Märkten, über externe Effekte oder über Veränderungen von Produktivität, Arbeitsintensität oder der "Erwartungen".

Bekanntlich können derartige Phänomene u.a. paradoxe Situationen zur Folge haben, in denen die auf individuellen Nutzenüberlegungen beruhenden Entscheidungen derart negative Impacts auf das Gesamtsystem haben, dass im Endeffekt die getroffene Entscheidung unter dem Gesichtspunkt des einzelnen negativ ausfällt (vgl. dazu Opp (1985)).

Charakteristisch für synergetische Systeme ist die Einschränkung des individuellen Handlungsspielraums durch das Zusammenwirken mit anderen. d.h. die Verminderung individueller Freiheitsgrade. Haken spricht in diesem Zusammenhang vom Versklavungsprinzip. ("slaving principle", vgl. Haken (1983)). Bei sozialen und ökonomischen Systemen ist dies wertfrei gemeint: es braucht sich bei der "Versklavung" nicht um eine aufgezwungene Handlungs- und Machteinbusse zu handeln.

Das Auftreten synergetischer Prozesse wird in der Weise verstanden, dass einzelne Teile sich wie von einer unsichtbaren Hand getrieben anordnen und durch diesen Anordnungs-

## 5. <u>Neue Ergebnisse der Theorie nicht-linearer Systeme:</u> das Deterministische Chaos

Eine Bewegung erfolgt deterministisch, wenn sie durch streng bestimmbare, von Zufallseinflüssen unbeeinflusste Gesetzmässigkeiten generiert wird. Man denke als Beispiel an den freien Fall eines Steins in der Nähe der Erdoberfläche.

Sind an dem Zustandekommen eines deterministischen Bewegungsablaufs nur wenige Kräfte und Einflussfaktoren beteiligt, besitzt das System also nur endlich viele Freiheitsgrade, so sollte eine Prognose kein Problem sein. Kennt man die Gravitation an der Erdoberfläche, die Windgeschwindigkeit sowie Position, Masse und Luftwiderstandswert des Steines, so kann dessen Bewegungsablauf exakt vorherbestimmt werden.

In einem gewissen Gegensatz dazu wird mit dem Begriff "Chaos" Unordnung, Durcheinander, Turbulenzen, irreguläre Bewegung, Anarchie o.ä., also letztendlich ein Systemverhalten assoziiert, welches nicht-vorhersehbar und nicht-berechenbar ist, welches folglich keinen Gesetzmässigkeiten zu unterliegen scheint.

Schon in der Antike beschrieb der Begriff "Chaos" den Gegensatz zum "Kosmos". In der Vorstellungswelt jener Zeit war "Chaos" der mit ungeformten Urstoff gefüllte Raum, der noch nicht die Gliederung der Dinge (=Ordnung) enthält.

Chaotische Bewegungen sind in deterministischen Systemen mit praktisch unendlich vielen Freiheitsgraden nichts Ungewöhnliches. Ein typisches Beispiel sind Turbulenzen in Fliessgewässern. Erst vor wenigen Jahren konnte der Nachweis erbracht werden, dass solche Phänomene auch mittels deterministischer Modelle bei nur wenigen Freiheitsgraden reproduzierbar sind.

Bereits im vorigen Jahrhundert war u.a. der französische Mathematiker Poincare nicht weit von dieser Entdeckung entfernt, als er die Stabilität des Planetensystems untersuchte und in diesem Zusammenhang über das "Drei-Körper-Problem" nachdachte (vgl. Poincare (1892)). Doch resigniert schrieb er am Ende: "Die Dinge sind so bizarr, dass ich es nicht aushalte, weiter darüber nachzudenken."

stens 3 sein - auftreten können, verdanken wir wesentlich dem Metereologen N. Lorenz vom MIT. Als er im Jahre 1963 ein einfaches Modell der Wetterprognose auf seinem Computer testete und dabei scheinbar fehlerhafte Resultate erzielte, ging er ihnen näher auf den Grund und fand heraus, dass eine nur marginale Veränderung der Anfangswerte die Modelldynamik qualitativ sehr stark veränderte. Lorenz schloss daraus, dass tatsächliche Wetterveränderungen eventuell auf winzigste Einflüsse in der Atmosphäre rükführbar sind, dass folglich selbst dann, wenn sich das Wettergeschehen durch ein deterministisches Modell mit wenigen Freiheitsgraden beschreiben lässt, eine langfristige Wetterprognose unmöglich ist, denn der Anfangszustand, auf dem die Prognose aufzubauen hätte, ist nicht genau bestimmbar.

Lorenz basierte seine Experimente auf folgendem Differentialgleichungssystem:

(5.1b) 
$$\frac{dy}{--} = x(t) * (r-z(t)) - y(t)$$

Dabei sind x(t), y(t) und z(t) die drei Zustandsvariablen des Modells und "s", "a", "r" und "b" konstante Modellparameter.

Wir wollen auf die Interpretation dieser Gleichungen nicht eingehen und es mit dem Hinweis bewenden lassen, dass viele andere Systeme, z.B. Turbulenzen in Flüssigkeiten und Gasen, nicht-lineare elektrische Netzwerke, Magnetismus, Supraleitung, Laser, chemische Reaktionen (z.B. Belusov-Zhabotinski-Reaktion) u.a. sich mittels des Lorenz-Modells abbilden lassen. (vgl. Haken (1978)).

phiert wird.

Wird das Lorenz-Modell von zwei dicht beieinander liegenden Anfangswerten aus simuliert - und dies war die Versuchsanordnung von Lorenz -, so sind die zwei errechneten Trajektorien untereinander derart unterschiedlich, dass von einem gewissen Zeitpunkt an keinerlei ähnlichkeiten mehr festgestellt werden können.

Man spricht bei der in Figur (5.1) geezeigten Trajektorie von einer Bewegung entlang eines "seltsamem Attraktors" (engl. "strange attractor"), der im vorliegenden Fall "Lorenz-Attraktor" genannt wird.

Bei genauerer Betrachtung des Lorenz-Attraktors wird deutlich, dass die Umlaufzahlen Ähnlichkeiten zu einem stochastischen Prozess aufweisen, die Bewegung selbst aber nicht rein zufällig ist, d.h. "weissem Rauschen" entspricht, sondern gewisse ordnende Gesetzmässigkeiten erkennen lässt.

In der Natur finden sich viele Beispiele für analoge Bewegungsabläufe. So besitzen Turbulenzen in Flüssigkeiten identifizierbare Bewegungsmuster, die sich klar vom weissem Rauschen, d.h. den erratischen Molekularbewegungen unterscheiden lassen. Letztere sind gleichzeitig mit Turbulenzen vorhanden, doch finden sie auf einer sehr viel kleineren Skala statt. In siedendem Wasser können wir die Turbulenzen beobachten, die erratischen Molekularbewegungen hingegen nicht.

Mit der Möglichkeit, durch das Lorenz-Modell eine mathematische Analogie für Turbulenzen und Chaos zu finden, steht gleichzeitig ein Instrument zur Verfügung, den Übergang zwischen periodischen resp. quasi-periodischen und chaotischen Bewegungen analytisch studieren zu können.

Solche Übergänge lassen sich täglich beobachten, etwa bei der Erhitzung einer Flüssigkeit. Das Benard-Experiment stellt eine Versuchsanordung zur genaueren Beobachtung dieses Phänomens dar.

Wenn die Temperatur weiter erhöht wird, können mit verfeinerten Beobachtungsinstrumenten weitere Instabilitäten und dazwischenliegende Gleichgewichtszustände beobachtet werden. Die neuen Gleichgewichte sind stationär oszillierend mit verdoppelter Periodizität. Man spricht von "periodenverdoppelnder Kaskadenverzweigung".

Bei weiterer Temperaturerhöhung mündet schliesslich die Bewegung der Konvektionszellen in eine unregelmässige, chaotiche Struktur ein, wie sie jedermann vom kochenden Wasser her kennt.

Der Obergang von periodischen zu chaotischen Bewegungen scheint in der Natur nach wenigen immer gleichen Mustern abzulaufen. Eines dieser Muster ist die soeben beschriebene Periodenverdopplung.

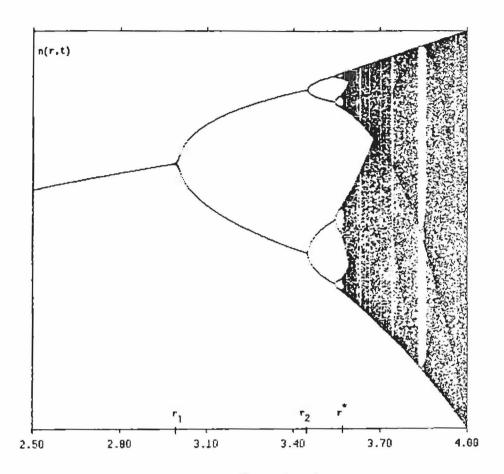
Es kommt im entscheidenden Moment offenbar nicht so sehr auf die systemspezifischen Gesetzmässigkeiten an, diese spielen für die lokale Situation einer Bifurkation, z.B. in einem Überhitzungszustand, keine wesentliche Rolle. Auf welche Ursache dies zurückzuführen ist, vermag die Wissenschaft heute noch nicht klar zu beantworten.

## 5.2. Mathematische Kriterien dafür, dass eine Bewegung chaotisch genannt wird

Nach diesen heuristischen Betrachtungen drängt sich die Frage nach der exakten Definition einer als chaotisch zu bezeichnenden Bewegung auf. Bis heute ist noch kein entsprechendes Kriterium entwickelt worden, welches an den erläuterten Beobachtungen anknüpft und sie in die mathematische Axiomatik überträgt.

Die formale Begriffsbildung erfolgt zur Zeit auf einem Umweg, nämlich über das Konstrukt der "Lyapunov-Exponenten".

Zur Verdeutlichung des Vorgehens greifen wir zurück auf das bereits in Kapitel 2. vorgestellte logistische Modell (2.6) des Wachstums einer Population mit Kapazitätsbeschränkungen. Dieses Modell hat in seiner zeit-diskreten (und nor-



Figur (5.3): Das Feigenbaum-Experiment

- Für Wachstumsraten

$$(5.5) 3 < r <= 3.45 = r$$

oszilliert die Population im langfristigen dynamischen Gleichgewicht zwischen zwei Werten;

- wächst r weiter an, verbleibt aber unterhalb des kritischen Grenzwertes:

(5.9) L = 
$$\lim_{n \to \infty} \frac{T}{n}$$
 df  
 $\int_{---}^{1} \frac{df}{dh}$  ln  $\int_{---}^{1} \frac{df}{dh}$ 

Der Grenzübergang sorgt dafür, dass "L" im allgemeinen unabhängig wird von der Wahl des Anfangswertes n(0). (10)

Die Bedeutung des Lyapunov-Exponenten "L" ergibt sich daraus, dass die durchschnittliche Zunahme des Abstands zweier benachbarter Trajektorien pro Iterationsschritt gleich exp(L) ist. In die Sprache der diskreten Dynamik übersetzt, verhält sich der Abstand proportional

Iterationsschritt	Mittlerer Abstand zweier Trajektorien	
0 1 2	<pre>d = Anfänglicher Abstand d * exp(L) d * exp(2*L)</pre>	
3	d * exp(3*L)	
•	•	
i	d * exp(t*L)	

Für L<O konvergiert der anfängliche Abstand "d" gegen Null, während für L>O dieser mit der Zeit exponentiell wächst. Chaotische Bewegung ist folglich bei einem positiven Lyapunov-Exponenten gegeben.

Diese Analogie wird in Figur (5.4) vor Augen geführt. Dort sind im unteren Teil die errechneten Lyapunov-Exponenten aufgezeichnet. Negative Exponenten entsprechen den Bereichen periodischer Bewegung, während positive Exponenten mit dem chaotischen Bereich kongruieren. In den Bifurkationspunkten des Modells schliesslich nimmt der Lyapunov-Exponent den Wert Null an.

Die "Löcher" im chaotischen Bereich (siehe den oberen Teil von Figur (5.4)) sind nicht das Ergebnis von Rechnerungenauigkeiten (Rundungsfehler), sondern finden ihre Entsprechung in negativen Lyapunov-Exponenten, ein Zeichen dafür, dass im chaotischen Bereich des Feigenbaum-Experiments Bänder mit periodischen Bewegungsmustern existieren.

Lyapunov-Exponenten lassen sich näherungsweise dafür verwenden, den Zeithorizont abzustecken, für den das Modell mit den vorgegebenen Parameterwerten Prognosen zulässt. Da ursprünglich benachbarte Anfangswerte sich mit der Zeit "t" proportional zu exp(t+L) auseinanderentwickeln, erreichen die Abstände einmal die Grössenordung des zur Verfügung stehenden Wertebereichs. Spätestens dann verlaufen die beiden Trajektorien völlig unkorreliert zueinander. Lässt sich also der (mittlere) Anfangsfehler "d" abschätzen, so ist bei chaotischen Bewegungen eine Voraussage innerhalb einer gewünschten Toleranz "toll" nur über den Zeitraum

möglich.

Offensichtlich bedarf es zur Errechnung des Lyapunov-Exponenten der Kenntnis der zugrundeliegenden Bewegungsgleichungen (5.8). Sind diese unbekannt, d.h. bestehen keine theoretischen Annahmen über die Gesetzmässigkeiten des Bewegungsablaufs, so lassen sich immerhin aus einer langen Zeitreihe von Beobachtungen Rückschlüsse darauf ziehen, ob diese Daten auf einen rein stochastischen Prozess zurückzuführen sind oder ob sie das Ergebnis einer chaotischen Bewegung mit nur wenigen Freiheitsgraden sind.

Hierbei gelangt das Konzept der "fraktalen Dimension" eines Attraktors zur Anwendung (vgl. Grassberger/Procaccia (1983), Schuster (1984)).

Ausgangspunkt ist die Zeitreihe eines Vektors von Beobachtungswerten ((x(t), t=0,1,...). Für eine Zahl 1>0 – die Kunst besteht darin, für "I" einen Wert zu finden, der die Summe aus dem Rundungsfehler und dem Approximationsfehler, der aus der Beschränktheit des Datenvorrates resultiert, minimiert – zählt man alle Paare (x(t), x(t')), für die

vielen Freiheitsgraden erzeugt wurde und als Realisierung eines Zufallsprozesses interpretiert werden kann. Andernfalls handelt es sich um eine deterministisch erzeugte Bewegung, und der Wert der fraktalen Dimension gibt Auskunft darüber, wie gross die Anzahl der diesen Prozess erzeugenden Bewegungsgleichungen, d.h. die Zahl der Freiheitsgrade des Modells, (mindestens) ist.

Als Beispiel wird die fraktale Dimension des Lorenz-Attraktors mit 2.05 angegeben (vgl. Grassberger/Procaccia, (1983) S. 347). Die Dimension ist nicht ganzzahlig, sondern gebrochen, daher der Begriff "fraktal". Der Lorenz-Attraktor lässt sich demzufolge in einen Raum der Dimension "3" einbetten.

### 5.3. Anwendungsmöglichkeiten in den Sozialwissenschaften

Es sind inzwischen einige Beiträge im Bereich der Sozial-wissenschaften erschienen, die Modelle mit inhärenten irregulären Bewegungsabläufen zum Gegenstand haben. Für den Bereich der Wirtschaftswissenschaften erweiterte Day (1982) das neoklassische Wachstumsmodell um negative Einflüsse einer wachsenden Umweltbelastung auf die Produktivitätsentwicklung und berechnete damit quasi-stochastische Fluktuationen. Day und Shafer wiesen (1985) nicht-periodische Zyklen in Wirtschaftsmodellen keynesianischen Typs nach und zeigten, dass dies nicht einmal ein seltener Spezialfallist. Eine Studie von Van der Ploeg (1985) diagnostizierte die Möglichkeit von Chaos auf den Kapitalmärkten unter der Annahme rationaler Erwartungen und hoher Risikoaversion der Investoren.

Modellansätze dieser Art basieren explizit oder implizit auf synergetischen Verhaltensannahmen und sind folglich vom Typ her nicht-linear. Die Nicht-Linearität ist eine formale Voraussetzung dafür, dass sich mit dem Modell chaotische Bewegungsabläufe reproduzieren lassen.

Grundsätzlich gilt: je komplexer ein System, desto eher besteht die Möglichkeit, dass die Dynamik chaotische Züge annimmt. Die Ergebnisse der Theorie komplexer dynamischer Systeme wirft die Frage auf, warum so viele Systeme dennoch oft reguläre Bewegungsmuster aufweisen. Haken sieht die Be-

## 5.4. Ein Modell des Rüstungswettlaufs

Wir wollen zur Illustration dieses Aspekts ein Beispiel referieren, welches Weidlich/Haag (1983) als Erweiterung eines von Richardson (1960) vorgestellten Modells des Rüstungswettlaufs entwickelten.

Das Modell von Weidlich und Haag unterscheidet zwei Gesellschaften, die untereinander im Wettbewerb stehen. Jede dieser Gesellschaften wird durch die folgenden 3 Zustandsvariablen beschrieben:

- P die "politische Atmosphäre" in der Gesellschaft in Hinblick auf Friedfertigkeit oder Konfrontation gegenüber dem Gegner. Weidlich/Haag sprechen von Sympathie resp. Antipathie gegenüber der gegnerischen Gesellschaft. Der Wertebereich dieser Variable liegt zwichen "-1" (für Konfrontation) und "1" (für Friedfertigkeit);
- E die Ausstattung der Gesellschaft mit Wirtschaftsgütern. Damit ist neben der Höhe des Bruttosozialprodukts das Produktionspotential sowie die Ausstattung mit langlebigen Konsumgütern gemeint;
- die Bereitschaft, im Spannungsfall dem Gegner militärische Schläge zu versetzen. Diese Variable ist in Friedenszeiten definitionsgemäss Null.

Im Folgenden erläutern wir die Bewegungsgleichungen für Gesellschaft "1", die analog für die andere Gesellschaft gelten.

Für die Veränderung des politischen Klimas nehmen Weidlich/ Haag (analog zum Modell des gesellschaftlichen Meinungsbildungsprozesses, vgl. Kap. 2.4) folgendes an:

(5.15) 
$$\begin{array}{rcl} & dP & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ --- & = & sinh(u) & -P & * cosh(u) \\ dt & & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

einer anderen Zeitskala abläuft als Veränderungen des Meinungsklimas. Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt einen (autonomen) Wachstumsprozess mit Sättigung, der zweite Term bringt den Einfluss des gesellschaftlichen Klimas auf das Wirtschaftswachstum zum Ausdruck, der dritte den Einfluss des bilateralen Handels, dessen Volumen proportional zu dem in beiden Gesellschaften bestehenden Klima "P" ist. Schliesslich erfasst der letzte Term von Gleichung (5.18) den Einfluss der gegnerischen Zerstörungen.

Die Variable der Zerstörungsbereitschaft verändert sich analog:

Hier wird - mit dem letzten Term - die Eskalation durch erlittene Zerstörungen unterstellt. Der erste Term dämpft diese Entwicklung, solange das gesellschaftliche Klima oberhalb der kritischen Grenze "P-sub" ist, andernfalls bedeutet er die Verstärkung der Angriffsbereitschaft.

Es ist an dieser Stelle unmöglich, einen Überblick der mit diesem Modell berechenbaren Szenarien zu geben. Wir verweisen auf Weidlich/Haag (1983), S. 194 ff und beschränken uns auf die Präsentation eines Beispiels. Es ist errechnet worden unter der Annahme einer hohen gesellschaftlichen Kohäsion "c" und "c" in beiden Gesellschaften, mässiger ge-

genseitiger Klima-Beeinflussung "c" und "c", sowie un-12 21

ter der externen Vorgabe eines Angriffs von Gesellschaft "1" auf Gesellschaft "2". entwickeln sie sich in der Folge wieder sehr unterschiedlich.

Das Szenario impliziert, wie Weidlich/Haag betonen, nicht unbedingt eine pessimistische Schlussfolgerung, denn geringfügige Modifikationen von Parametern führen das System in stabile friedliche Verhältnisse. Weise einfach erklärbar geworden ist, werden wir sie nicht mehr als besonders komplex wahrnehmen.

Wissenschaftliche Erkenntnisprozesse beruhen auf Analogieschlüssen (vgl. Rapoport (1981), S. 106 f). Gelingt die Komplexitätsreduktion unüberschaubarer sozialer Strukturen durch die Herstellung von Analogien zu formalen Modellen, so werden diese Strukturen begreifbar, interpretierbar und bis zu einem bestimmten Grad prognostizierbar.

Die Anwendung des systemanalytischen Ansatzes in den Sozialwissenschaften basiert auf dem Paradigma, dass solche Analogien existieren: die Gründe, wonach es in physikalischen, chemischen, biologischen, medizinischen und anderen naturwissenschaftlichen Systemen möglich ist, die wesentlichen Faktoren auf einfache, d.h. überschaubare Modelle abzubilden, sind auch in sozialwissenschaftlichen Fragestellungen gegeben.

Die Analogien basieren im Kern auf dem Prinzip der "adiabatischen Eliminierbarkeit irrelevanter Variabler" (vgl. Haken (1978), S. 194 ff): es ist in der Regel zulässig, Variable, die sich nur relativ langsam verändern, im Verhältnis zu den schnellen Variablen als konstant zu betrachten und damit zu eliminieren.

In manchen kritischen Sītuationen, d.h. in der Nähe von Bifurkationspunkten, muss der Einfluss dieser, in anderen Situationen irrelevanten Variablen explizit erfasst werden, um gültige Aussagen über das Systemverhalten treffen zu können. Doch sind nicht-lineare dynamische Systeme, d.h. Systeme, die sich nicht angemessen durch lineare resp. linearisierbare Funktionalbeziehungen abbilden lassen, nicht grundsätzlich instabil dergestalt, dass von kleinen Ursachen immer grosse Wirkungen ausgehen müssen.

Wir können dies am Verhältnis der klassischen Mechanik und der Einsteinschen Relativitätstheorie verdeutlichen: die klassische Mechanik bleibt als theoretisches Modell für viele physikalische Probleme gültig und kann fruchtbar angewandt werden, obwohl ihre Gültigkeit in bestimmten Fällen nicht gegeben ist und sie dort durch die Relativitätstheorie ersetzt werden muss.

Für die soziologische Theoriediskussion ergibt sich aus der Beobachtung dieses Ansatzes ein weiteres Resultat: die Behandlung von Emergenz-Effekten und des Mikro-Makro-Verhältnisses kann in einer eindeutig analytischen Orientierung

#### FUSSNOTEN

- (1) Zur Verdeutlichung sei darauf hingewiesen, dass es sich bei dieser Folge um Werte handelt, die auf der (kontinuierlichen) Trajektorie des stetigen Modells (2.6) liegen, nicht hingegen um die Ergebnisse eines analog zu Abschnitt 2.2 konstruierten diskreten Modells.
- (2) Natürlich muss zu jedem beliebigen Zeitpunkt "t" die Populationsgrösse immer einen Wert n(t) annehmen, die Summe der Wahrscheinlichkeiten über alle zulässigen Populationsgrössen ist für jeden Zeitpunkt "t" gleich:

Diese Restriktion ist mit der stochastischen Differentialgleichung (2.11) immer erfüllt.

- (3) Dieser Modelltyp wird in den Naturwissenschaften häufig verwendet, wenn ein komplexes System aus einer grossen Zahl von Elementen besteht, die untereinander in wechselseitigen Interaktionen stehen, über deren Art und Weise keine Details bekannt sind oder angenommen werden können (vgl. Haken (1978), S. 315 ff).
- (4) Ist das Zeitintervall und damit "g" gross, so besteht die Möglichkeit, dass die Wahrscheinlichkeiten "w" Werte grösser als 1 annehmen, denn in entsprechend langen Zeiträumen können die Angehörigen mehrmals ihre Meinungen wechseln.
- (5) "cosh" resp. "sinh" resp. "tanh" sind Abkürzungen für "Cosinus Hyperbolikus" resp. "Sinus Hyperbolikus" resp. "Tangenz Hyperbolikus". Es wurde g=1 gesetzt.
- (6) Natürlich muss R(t)>O sein. Im Unterschied zu Optimierungsansätzen wird das Reservoir nicht jeweils bis zur vollständigen Erschöpfung genutzt, es bleiben also regelmässig ungenutzte Reserven übrig. Dies kann man auch als Verschwendung oder (ökonomische) Ineffizienz interpretieren.

## REFERENZEN

J. Benhabib, R.H. Day	(1981) Rational Choice and Erratic Behavi- or. In: Review of Economic Studies 48, pp. 459-471
E. Brun	(1986) Hierarchien von Gleichgewichtszuständen selbstorganisierender Systeme. In: F. Stolz (Ed.) Gleichgewichts- und Ungleichgewichtskonzepte in der Wissenschaft, Zürich, pp 21-40
J.S. Coleman	(1964) Introduction to Mathematical Sociology. The Free Press, New York
P.A. Corning	(1983) The Synergism Hypothesis. McGraw Hill
R.H. Day	(1982) Irregular Growth Cycles. In: The Americal Economic Review, Vol 72, pp. 406-414
R.H. Day, W. Shafer	(1985) Keynesian Chaos. In: Journal of Macroeconomics, Vol 7, pp. 277-295
G. Erdmann, B. Fritsch	(1985) Synergismen in Parteiensystemen. Arbeitspaniere des Instituts für Wirtschafts- Forschung, Zürich
H. Esser	(1985) Soziale Differenzierung als ungeplante Folge absichtsvollen Handelns. Der Fallethnischer Segmentation. In: Zeitschrift für Soziologie, Vol. 14, pp. 435-449
B. Fritsch	(1985) Das Prinzip Offenheit. Anmerkungen zum Verhältnis von Wissen und Politik. Olzog-Verlag, München
G. Gaefgen	(1968) Theorie der Wirtschaftlichen Ent- scheidung. Tübingen

P.Grassberger, (1983) Measuring the Strangeness of Strange I.Procaccia Attraktors. In: Physicia Vol. 9D, pp. 180-208

- A. Rapoport (1981) Der mathematische und der organische Ansatz der Allgemeinen Systemtheorie. In: R. Kappel, I. Schwarz, Systemforschung 1970-1980. Göttingen
- F. Richardson (1960) Arms and Insecurity. Boxwood
- A.M.Saperstein (1984) Chaos A Model for the Outbreak of War. In: Nature, 24. Mai 1984
- L.F.Schampine, (1975) Computer Solution of Ordinary Diffe-M.K.Gordon rential Equations. The Initial Value Problem. Freeman & Co., San Francisco
- H.G. Schuster (1984) Deterministic Chaos. An Introduction. Physik Verlag, Weinheim
- M. Stutzer (1980) Chaotic Dynamics and Bifurcation in a Macro Model. In: Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 32, pp. 353-376
- R. Thom (1976) Structural Stability and Morphogenesis (English Translation), Benjamin, New York
- F. van der (1985) Rational Expectations, Risk and Chaos Ploeg in Financial Markets. In: Supplement to the Economic Journal, Conference Papers, Vol. 96, pp. 151-162
- W. Weidlich, (1983) Concepts and Models of a Quantitative
   G. Haag Sociology. The Dynamics of Interacting
   Populations. Springer Verlag, Berlin et al.
- H. Willke (1982) Systemtheorie. Stuttgart, New York
- L. Whyte (1965) Internal Factors of Evolution. London O.pl 58

Einstellung 19, 39. 72
Elimination 27, 50, 70
- adiabatische 27, 77
Emergenz 3f, 51, 77
Entscheidung 18, 24, 34, 40, 45, 52f
Erkenntnisprozess 3, 77
Evolution 6, 17f, 24f, 40
Evolutionstheorie 31

Feed-back 51
Feigenbaum-Experiment 62f
Fixpunkt 9, 12, 22f, 31, 39, 45
Flexibilität 21
Fluktuation 13, 24, 27, 37, 47ff, 69f
Freiheitsgrad 53ff, 60, 67, 69f
Friedfertigkeit 71f
Funktion 22, 26
- exponential 11, 20f, 39, 47, 65ff
- logistische 10, 64
- theta 68

- Verteilungs 18

Geburtenrate 6, 30f, 35 Gesellschaft 19, 22ff, 26, 39, 45, 71ff Gleichgewicht 9f, 12, 18, 22ff, 26, 31, 34ff, 41ff, 60ff

- dynamisches 45, 60, 63

- labiles 9

- stabiles 9, 22ff, 27, 43 - stationär oszillierend 61

- Walrasianisches 27

Gleichung

- Master- 13f, 16

- Navier-Stokes 60

- transzendente 22f

- Verhulst 10

Gravitation 55

Grenzübergang 65

Grenzzyklus 37, 45f, 60

Gruppe 4, 19, 29f, 39ff

Ideologie 19, 39
Integration 41
Interaktion 3ff, 9, 29f, 41f, 51ff, 60, 76
Interdisziplinarität 3f, 51
Invarianz 9, 16, 27
Isomorphie 3
Iteration 12, 62, 64f

ökonomie 8, 27, 52f, 70 Ordner 54 Ordnung 4, 26, 54f, 60, 70 Ordnungsparameter 40 Ordnungszustand 50, 70

paradox 53 Parameter 6ff, 11f, 15ff, 21f, 24, 27, 32, 35ff, 40f, 44ff, 62, 67, 70, 75f 4, 38ff, 47ff, 60 Partei - Volks- 41 Periode 35, 45, 47ff, 56, 58, 61, 64f, 67, 69f Periodenverdopplung 61, 64 Phasenraum 33f, 36, 41ff Phasenübergang 26, 50, 60 Pluralismus 22, 24 Polarisierung Politiker 26 Politikwissenschaft 38 Polynom 12f Population 5ff, 9ff, 18, 29ff, 51, 61ff Präferenz 21, 39, 52 - autonome 21 Prognose 26, 55, 57f, 67, 70, 77 Prozess - irreversibler 27 - stochastischer 13, 56, 59, 64, 67 - synergetischer 53

Räuber 29, 35
Rationalität 52f, 69
Redundanz 70
Regeneration 35
Regimewechsel 26
Relativitätstheorie 77
Reproduktion 30
Ressourcen 29ff, 34f
Restriktionen 52
Rückkopplung 20, 72
Rundungsfehler 11, 67
Runge-Kutta-Algorithmus 12

Schrittweite 11
Selbstorganisation 4, 29, 37ff, 44, 46, 51, 54, 56, 60
Senke 43
Simulation 11, 18, 45, 47, 56, 59, 62, 74
- Monte-Carlo 15
slaving principle 53, 70

Wanderung 19 Wettbewerb 29f, 34, 71 Wirtschaftswissenschaft 69 Wirtschaftspolitik 27 Wirtschaftspotential 71ff

Zeitverschränkung 51 Zerstörung 72f, 74 Zufallsprozess 56, 64, 69

# ZUMA-Arbeitsberichte

80/15	Gerhard Arminger, Willibald Nagl, Karl F. Schuessler Methoden der Analyse zeitbezogener Daten. Vortragsskripten der ZUMA- Arbeitstagung vom 25.09. – 05.10.79
81/07	Erika Brückner, Hans-Peter Kirschner, Rolf Porst, Peter Prüfer, Peter Schmidt Methodenbericht zum "ALLBUS 1980"
81/19	Manfred Küchler, Thomas P. Wilson, Don H. Zimmerman Integration von qualitativen und quantitativen Forschungsansätzen
82/03	Gerhard Arminger, Horst Busse, Manfred Küchler Verallgemeinerte Lineare Modelle in der empirischen Sozialforschung
82/08	Glenn R. Carroll Dynamic analysis of discrete dependent variables: A didactic essay
82/09	Manfred Küchler Zur Messung der Stabilität von Wählerpotentialen
82/10	Manfred Küchler Zur Konstanz der Recallfrage
82/12	Rolf Porst "ALLBUS 1982" - Systematische Variablenübersicht und erste Ansätze zu einer Kritik des Fragenprogramms
82/13	Peter Ph. Mohler SAR - Simple AND Retrieval mit dem Siemens-EDT-Textmanipulations- programm
82/14	Cornelia Krauth Vergleichsstudien zum "ALLBUS 1980"
82/21	Werner Hagstotz, Hans-Peter Kirschner, Rolf Porst, Peter Prüfer Methodenbericht zum "ALLBUS 1982"
83/09	Bernd Wegener Two approaches to the analysis of judgments of prestige: Interindi- vidual differences and the general scale
83/11	Rolf Porst Synopse der ALLBUS-Variablen. Die Systematik des ALLBUS-Fragen- programms und ihre inhaltliche Ausgestaltung im ALLBUS 1980 und ALLBUS 1982
84/01	Manfred Küchler, Peter Ph. Mohler Qualshop (ZUMA-Arbeitstagung zum "Datenmanagement bei qualitativen Erhebungsverfahren") - Sammlung von Arbeitspapieren und -berichten, Teil I + II
84/02	Bernd Wegener Gibt es Sozialprestige? Konstruktion und Validität der Magnitude-